

Egy egyszerű ütemezési probléma megoldásának tanulságai

(Tanulmány)

Az élet gyakran másként alakul, mint ahogy tervezzük. Kifinomult sztochasztikus tervezéssel ezen lehet javítani, de még így is előfordulnak rendkívüli helyzetek. Mit tehetünk ilyenkor?

A kármentést sem szabad elkapkodva vezetni! Ha több megoldás van, hogyan választjuk ki gyorsan a legjobbat? Gyorsan kell dönteni, mert sürges a helyzet. Van jó matematikai modellünk? Meg tudjuk oldani néhány perc alatt?

Egyszerű józan megfontolással is kaphatunk nem rossz megoldást, de egy jól felállított matematikai modell helyes megoldása mindig jobb. Ez kisméretű feladatok esetében csak néhány százalék, bonyolult esetekben azonban a különbség ennél sokkal nagyobb is lehet.

Kisméretű esetekben gyors megoldást nyerhetünk egyszerű MS Excel táblázatkezelővel is. E tanulmányban bemutatunk egy ilyen helyzetet, annak matematikai modelljét, megoldását, és mellékeljük a megoldó Excel munkalapot. De azt is megmutatjuk, hogy e módszer használatának korlátai vannak.

Valódi, összetett feladatok megoldására nem alkalmasak a táblázatkezelő programok. Nagyobb feladatok megoldására fejlettebb eszközöket célszerű használni, pl. a GAMS, az ILOG, vagy a mai legfejlettebb AIMMS szoftverre épülő céltermékeket.

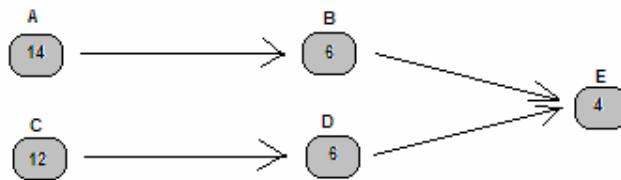
"Egyszerű józan megfontolással is kaphatunk nem rossz megoldást, de egy jól felállított matematikai modell helyes megoldása mindig jobb."

"Nagyobb feladatok megoldására fejlettebb eszközöket célszerű használni, pl. a mai legfejlettebb AIMMS szoftverre épülő céltermékeket."

Alaphelyzet

Egy jól működő részvénytársaság egyik termelő egysége azonnali karbantartásra szorul. Az egységben 2 munkagép üzemel. A karbantartási feladat egymást követő, jól definiált lépésekből áll, ezek a következők (1. ábra):

1. Az egyes gépek karbantartása. Ez gépenként két, egymást követő részfeladat:
 - 1.1. A gép szükséges javításának elvégzése.
 - 1.2. A gép működésének helyes beállítása.
2. A rendszer egészének tesztelése.



1. ábra: A munkafolyamatok sorrendje és szokásos ideje

A részfeladatok elvégzésének várható (normál) időtartamát és árát mutatja az alábbi táblázat:

| | megnevezés | normál idő (nap) | normál ár (Ft) |
|---|-------------------|---------------------|-------------------|
| A | 1. gép javítása | 14 | 150.000 |
| B | 1. gép beállítása | 6 | 60.000 |
| C | 2. gép javítása | 12 | 150.000 |
| D | 2. gép beállítása | 6 | 60.000 |
| E | Rendszerteszt | 4 | 90.000 |

Probléma

Az A-B-E sor ideje 24 nap, a C-D-E sor ideje 22 nap, ezek közül az első a hosszabb. Így a folyamat elejétől a végéig 24 napra van szükség, ezt számításba vették a termelési program elkészítésekor.

Idén azonban előre nem látható elektromos szerelési munkák miatt 4 napig nem lesz áramellátás a körzetben, éppen akkor, amikor a karbantartás esedékessé válik. Ezért idén csak 20 nap áll a cég rendelkezésére a karbantartási munkálatokhoz. A gépeket mindenképpen működőképes állapotba kell hozni, különben milliós veszteség éri a társaságot.

De hogyan végezzük el a karbantartást rövidebb idő alatt, mint amennyit a termelési programban erre számítottunk?

A karbantartást a cég külső vállalkozókkal végezteti el. A vállalkozó hajlandó meggyorsítani a folyamatot, de csak magasabb áron. Az árajánlatot rögzíti az alábbi táblázat.

| jel | minimum idő (nap) | Időnyereség (nap) | Gyorsmunka ára (Ft) | Többlet-költség (Ft) |
|-----|-------------------|-------------------|---------------------|----------------------|
| A | 9 | 5 | 240.000 | 90.000 |
| B | 4 | 2 | 105.000 | 45.000 |
| C | 8 | 4 | 270.000 | 120.000 |
| D | 2 | 4 | 140.000 | 80.000 |
| E | 2 | 2 | 165.000 | 75.000 |

A vállalkozó tájékoztatása szerint a többletköltség arányos a megtakarított napok számával.

Az árajánlat alapján áttekinthető, hogy hol hány napot és mennyiért lehet nyerni, illetve mennyi az együttes időnyereség és többlet-költség. Ezt mutatja az alábbi táblázat.

| jel | normál idő (nap) | minimum idő (nap) | Időnyereség (nap) | Gyorsítás napi költsége (Ft/nap) |
|-----|------------------|-------------------|-------------------|----------------------------------|
| A | 14 | 9 | 5 | 18.000 |
| B | 6 | 4 | 2 | 22.500 |
| C | 12 | 8 | 4 | 30.000 |
| D | 6 | 2 | 4 | 20.000 |
| E | 4 | 2 | 2 | 37.500 |

"A gépeket mindenképpen működőképes állapotba kell hozni."

"Hogyan végezzük el a karbantartást rövidebb idő alatt?"

Célkitűzés

Látható, hogy a feladat 15 nap alatt is elvégezhető, 9 nappal hamarabb, mint egyébként, de 410.000 Ft költségtöbblet árán. Csakhogy a cégnek nincs szüksége 9 nap időnyereségre, éppen elegendő lenne 4 nap. Ez nyilván olcsóbb, ha nem kérjük a leggyorsabb munkát. Melyik gyorsítást kérjük, és melyiket ne?

Világos, hogy itt egy minimum-keresési feladatról van szó. Ilyenkor jó szolgálatot tehet egy megbízható matematikai modell. Esetünkben ez egyszerű, csak néhány rövid sor. Íme:

"Jó szolgálatot tehet egy megbízható matematikai modell"

Modell

Legyen K_j az egyes lépések egy napra eső többletköltsége ($j=A, B, C, D, E$). Jelöljük az x_j változókat azt, hogy az egyes feladatoknál hány nap gyorsítást kérünk.

A teljes felmerülő többletköltség:

$$S = x_A * K_A + x_B * K_B + x_C * K_C + x_D * K_D + x_E * K_E$$

Ezt a függvényt kell minimalizálni. (Ez az ún. célfüggvény.)

Az elérhető legnagyobb időnyereségeket figyelembe kell venni a következő korlátokkal:

$$x_A \leq 5$$

$$x_B \leq 2$$

$$x_C \leq 4$$

$$x_D \leq 4$$

$$x_E \leq 2$$

Természetesen a legolcsóbb az lenne, ha egyáltalán nem kérnénk gyorsítást. Azonban a munkát el kell végezni 20 nap alatt. Ezt, vagyis a feladat fő korlátját két egyenlőtlenség fejezi ki, mert az 1. ábra szerint két úton jutunk el a munka kezdetétől a végéig:

$$(14 - x_A) + (6 - x_B) + (4 - x_E) \leq 20$$

$$(12 - x_C) + (6 - x_D) + (4 - x_E) \leq 20$$

Megoldás Excel-lel

MS Excel táblázatkezelővel egyszerűen meghatározhatjuk az optimális rendelést. Ehhez az Excel programban először installálni kell a "Solver" opciót. Mellékeljük az Excel munkalapot.

Ha az Ön MS Excel programjában az 'Eszközök' vagy 'Tools' menüpont alatt nem szerepel a 'Solver' almenü, akkor telepítse a következők szerint:

Nyisson egy új munkafüzetet az Excelben. A menüsorban az 'Eszközök'-ön belül indítsa el a 'Bővítménykezelő'-t. Válassza ki a 'Solver' bővítményt (egyenletmegoldáshoz és optimalizáláshoz használható eszköz), és telepítse. (Ugyanez angol nyelvű Office esetén: Tools/Add-Ins/Solver stb.) Ha sikerült, akkor az 'Eszközök' legördülő menüpont alatt megjelenik a 'Solver'.

Nyissa meg a tanulmany.xls nevű fájlt MS Excel programmal. A kezdeti beállításban a változóink az x_A ...x_B nevű mezők alatt mind 0 értéket kaptak. Ez annak felel meg, hogy nincs gyorsítás, és többletköltség sincs (a célfüggvény értéke nulla). Ekkor a teljes karbantartási idő 24 nap.

Ha a változók helyére beírjuk, hogy legfőbb hány nappal csökkenthetjük a karbantartási időket, akkor a célfüggvény értéke 410.000 –re változik. Ez mutatja, hogy ekkor 410.000 Ft-tal kerül többre a karbantartás. Ekkor a karbantartási idő 15 napra csökken.

A két szélső eset között kell keresni az optimumot. Ehhez indítsa el a Solvert (Eszközök/Solver/ Megoldás/OK), ahol már minden szükséges paraméter be van állítva. (Ha az Ön gépén angol nyelvű Office fut, akkor: Tools/Solver/Solve/OK.)

Az eredmény nagyszerű: mindössze 111.000 Ft többletköltség árán végezhetünk a rendelkezésre álló 20 nap alatt, ha csak az 1. gép javítását és a rendszertesztet sűrgetjük meg 2-2 nappal.

"Ha az Ön MS Excel programjában nem szerepel a 'Solver' almenü, akkor telepítse a következők szerint"

"Indítsa el a Solvert. Már minden paraméter be van állítva."

"Mindössze 111.000 Ft többletköltség, ha csak az 1. gép javítását és a rendszertesztet sűrgetjük meg 2-2 nappal."

Hogyan működik ez a modell?

A fent leírt modell lineáris, de a változók egész értékűek. Ennek ellenére akkor is helyes megoldást kapunk, ha valós értékűnek tekintjük a változókat. Ellenőrizheti az alábbi módon:

Vizsgálja meg a változó mezők értékét (A3-tól E3-ig) úgy, hogy kiválasztja a mezőt, és megnézi tartalmát. Néhány esetben nem egész számot fog látni! Például legyen a rendelkezésre álló idő 20 nap, és oldja meg a feladatot a Solver-rel. x_A értéke látszólag 3, valójában azonban 2,99999999999301. x_D értéke látszólag 2, valójában 1,99999999999301.

Néha a 0 helyén furcsa számok jelennek meg, pl. -2.18E-13. Ennek kettős oka van. Először is a változókra nincs kikötve, hogy csak egész értékűek lehetnek, másodsor pedig a Solver bizonyos tűréssel (megengedett eltéréssel, hibával) számol. Nekünk azonban megfelel ez a pontosság.

Ha ez Önt mégis zavarja, akkor beállíthatja a pontos egészcértékűséget is. A főmenüben az Eszközök/Solver vagy Tools/Solver parancsok kiválasztása után újabb korlátokat is beírhatunk. A 'Hozzáadás' (az angol változatban: 'Add') gomb megnyomásával megjelenik egy újabb ablak, ahol újabb korlátokat jelölhetünk ki.

A 'Cellahivatkozás'-on (angolul: 'Cell reference') állva jelölje ki az A3, B3,...E3 mezőket, majd a reláció mezőben (ami jelenleg \leq jelet mutat) válassza ki az int relációt. A korlátozó feltételek jobboldalán ('Constraints') megjelenik a "egész" ('integer') felirat. Fogadja el ezt a kiválasztást az OK gombbal, és futtassa újra a solvert. Pontos egész értékeket fog kapni.

Előfordulhat, hogy az Ön MS Excel változata nem hajlandó elfogadni az egészcértékű kijelölést. Ne keseredjen el, inkább azon gondolkodjon, miért működik a megoldás még így is.

"Beállíthatja a pontos egészcértékűséget."

"Miért működik a megoldás még így is?"

Valóban, miért?!

Azért, mert a korlátok jobboldala csupa egész számból áll. Ellenőrizheti:

Törölje az egészértékűség feltételét! Angol esetben: Tools/Solver, jelölje ki ezt a feltételt, és nyomja meg a Delete gombot.

Legyen a rendelkezésre álló idő 20 nap, és állítson be a Minimális munkaidő legelső elemében 13,5 napot! A legtöbb nyerhető nap az A esetben 0,5 lesz. Optimalizáljon a Solver-rel, és megkapja az eredményt, hogy a az A tételből 0,5 nap előnyre van szükségünk.

Mi úgy tapasztaltuk, hogy akkor is törtnap eredményt kapunk, ha be van állítva az integer feltétel.

Ön is kipróbálhatja, ha be tudja állítani az `int` relációt.

Tanulságok

1. Heurisztika és egzakt modell.

Sokszor találkozunk ehhez hasonló optimalizálási problémával a valós életben. Legtöbbször egyszerű elgondolásaink, tapasztalataink alapján döntünk.

Például a matematikai modell helyett egyszerűen kiválasztjuk a két legolcsóbban gyorsítható lépést, és azokat sürgetjük meg. Ez az 1. gép javítását és a 1. gép beállítását sürgetné meg, azonban ezzel nem teljesíthető a határidő.

Ha a többletköltség oszlop legisebb tételeit választjuk ki, és arra is ügyelünk, hogy a határidőt teljesítsük, akkor a B és az E tételeket sürgetjük meg 2-2 nappal. Ekkor a többletköltség 120.000 Ft, ami több mint 8 százalékkal nagyobb az optimálisnál.

Néha a heurisztikus megoldások sem rosszak, de a matematikai modell megoldásai szinte mindig jobbak. Ebben a példában 10.000 Ft-okról volt szó, de a nagyobb cégeknél a hasonló problémák milliós vagy akár milliárdos nagyságrendűek is lehetnek. Nem mindegy, hogyan döntünk.

"A matematikai modell megoldásai szinte mindig jobbak. Nem mindegy, hogyan döntünk.."

2. Megoldó eszközök.

Az sem mindegy, hogy milyen eszközt használunk fel. Nem mindig lehet úgyesen LP-problémaként megfogalmazni az MILP problémát. Az Excel Solver egész értékre húzza a megoldást egész érték közelében, de meghagyja a törtmegoldást más esetekben, vagyis egészértékű problémák megoldására általában nem használható. Nem lesz hatékony az ilyen egyszerű megoldó programok alkalmazása akkor sem, ha a feladat nagy méretű, vagy ha nem lineáris.

Komoly problémák felelősségteljes megoldásához alkalmas eszközök pl. a GAMS, az ILOG, és az AIMMS modellező – megoldó környezetek. Mi az AIMMS alkalmazását javasoljuk, amiről további hasznos információt talál a www.optasoft.hu honlapon.

"Az Excel Solver egészértékű problémák megoldására általában nem használható."

"Komoly problémák felelősségteljes megoldásához alkalmas eszközök pl. a GAMS, az ILOG, és az AIMMS."

3. Mikor van rá szükség?

Ilyen jellegű feladatok nem csak ütemezés kapcsán fordulnak elő. Optimális erőforrás-felhasználás, kiszállítási, termelés-tervezés, szállítólánc, és még sok hasonló vezetői kihívás mind optimális megoldásra vár. Ha valóban fontos Önnek, hogy cége hatékonyabban működjön mint piaci vetélytársa, akkor válasszon megbízható eszközt, és megbízható modell-építő szakembereket!

*Matusik Ágnes¹
Dr. Rév Endre²*

Ha többet szeretne megtudni az optimalizáló módszerekről, eszközökről és szoftverekről, jelentkezzen legközelebbi tréningünkre a www.optasoft.hu honlapon.

¹ Matematikus, az OptaSoft Kft. operációkutatási szakértője

² Vegyész-mérnök, docens, MTA doktor, kutatási területe az optimális folyamattervezés. Az OptaSoft Kft. szakértője.